Московский государственный технический университет

имени Н.Э. Баумана

Факультет фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика»

**А.В. Неклюдов**

**Интегралы и**

**диффереренциальные уравнения**

**Электронное учебное издание**

**Лекции по курсу**

Москва

(С)2013 МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК: 517.3

Рецензент:

Неклюдов А.В., Интегралы и дифференциальные уравнения. Лекции по курсу" - М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, илл. 42.

Изложены основы интегрального исчисления функций одной переменной и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Большая часть теории излагается с подробными доказательствами, пояснениями и примерами.

Для студентов, изучающих и применяющих математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения.

*Рекомендовано Учебно-методической комиссией факультета "Фундаментальные науки" МГТУ им. Н.Э. Баумана*.

Оглавление

[1. Интегральное исчисление функций одного переменного 5](#_Toc346713501)

[1.1. Первообразная. Теоремы о первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов 5](#_Toc346713502)

[1.2. Интегрирование подстановкой и по частям. Примеры. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций. 6](#_Toc346713503)

[1.3. Интегрирование рациональных дробей. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование неправильных рациональных дробей. 11](#_Toc346713504)

[1.4. Определенный интеграл, его механический и геометрический смысл, теорема существования. Линейность и аддитивность определенного интеграла. 14](#_Toc346713505)

[1.5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. 17](#_Toc346713506)

[1.6. Вычисление определенного интеграла подстановкой и по частям. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат, интегрирование периодических функций. 18](#_Toc346713507)

[1.7. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, их свойства. Признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. 20](#_Toc346713508)

[1.8. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах 26](#_Toc346713509)

[1.9. Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения 29](#_Toc346713510)

[1.10. Вычисление длин дуг кривых и площадей поверхностей вращения 31](#_Toc346713511)

[2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 33](#_Toc346713512)

[2.1.Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). ДУ 1-го порядка. Частные и общее решения ДУ, интегральные кривые. Задача Коши и теорема существования и единственности ее решения. Особые точки и особые решения ДУ. 34](#_Toc346713513)

[2.2. Геометрическая интерпретация ДУ 1-го порядка. Поле направлений. Геометрическое решение ДУ 1-го порядка с помощью изоклин. 36](#_Toc346713514)

[2.3. Простейшие типы ДУ 1-го порядка (с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли) и их решение. 38](#_Toc346713515)

[2.4. ДУ n-го порядка. Частные и общее решения. Задача Коши, ее геометрическая интерпретация при n=2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Краевая задача. 42](#_Toc346713516)

[2.5. Понижение порядка некоторых типов ДУ высших порядков 43](#_Toc346713517)

[2.6. Линейные ДУ (ЛДУ) n-го порядка: однородные (ЛОДУ) и неоднородные (ЛНДУ). Теорема существования и единственности решения. Линейный дифференциальный оператор. Свойства линейного дифференциального оператора и линейность пространства решений ЛОДУ. 44](#_Toc346713518)

[2.7. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций и о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ. 45](#_Toc346713519)

[2.8. Теорема о размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. 48](#_Toc346713520)

[2.9. Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ n-го порядка и ее следствия. 49](#_Toc346713521)

[2.10. Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ n-го порядка. Теорема о наложении частных решений 51](#_Toc346713522)

[2.11. ЛОДУ с постоянным коэффициентами. Характеристическое уравнение и построение общего решения по его корням (вывод для ). 51](#_Toc346713523)

[2.12. Нахождение частных решений неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. 54](#_Toc346713524)

[2.13. Метод вариации постоянных решения неоднородных ЛДУ n-го порядка (вывод для ). 57](#_Toc346713525)

[2.14. Нормальные системы ДУ. Задача Коши и теорема существования и единственности ее решения. Сведение ДУ n-го порядка к нормальной системе. Сведение нормальной системы к одному уравнению n-го порядка. 59](#_Toc346713526)

[2.15. Автономные системы ДУ. Фазовое пространство и фазовые траектории. Первые интегралы систем ДУ. Симметричная форма записи систем ДУ и ее применение к нахождению первых интегралов. 61](#_Toc346713527)

[2.16. Нормальные системы ЛДУ, однородные и неоднородные. Матричная запись системы. Линейность пространства решений системы ЛОДУ. Вронскиан системы вектор-функций и его свойства. Теорема о размерности пространства решений системы ЛОДУ. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. 66](#_Toc346713528)

[2.17. Системы ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод для случая вещественных различных корней) 68](#_Toc346713529)

# Интегральное исчисление функций одного переменного

# Первообразная. Теоремы о первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов.

***Опр.*** Функция называется первообразной функции на , если .

*Пример.* – первообразная функции на интервале

***Теорема 1*** *(об арифметических свойствах первообразной).*

Пусть и – первообразные функций и соответственно. Тогда функция – первообразная функции (

***Док-во:*** , т.е. функция – первообразная функции

***Теорема 2*** *(об общем виде первообразной).*

Пусть – первообразная функции . Тогда любая первообразная функции имеет вид

, где

***Док-во:*** т.к. , то – тоже первообразная функции . Покажем, что любая первообразная имеет вид . Пусть – первообразная функции . Рассмотрим функцию : . Рассмотрим произвольные . т.е. . Значит,

***Опр.*** Совокупность всех первообразных функции называется неопределенным интегралом от функции .

***Обозн.:*** .

Пусть – первообразная функции . Тогда , где – произвольная постоянная.

*Пример.*

***Свойства неопределенного интеграла:***

1. или
2. *, где*

***Док-во:***

1. *,* где – первообразная функции
2. *.*
3. Т.к. – первообразная , то .
4. Пусть и – первообразные функций и соответственно.

Тогда функция – первообразная функции (. Отсюда

***Таблица интегралов:***

1. . (Т.к. при
2. ()
3. *,*
4. *,* (длинный логарифм)
5. *,*
6. *или*  (высокий логарифм)

*Примеры*.

# Интегрирование подстановкой и по частям. Примеры. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.

***Подведение под знак дифференциала.***

Пусть – первообразная функции на , т.е. . Рассмотрим замену , где – дифференцируемая на функция, .

Рассмотрим сложную функцию , .

*,* т.е. – первообразная для , т.е. , или , или ,

*Примеры.*

1. .

***Замена переменной.*** Поменяем в (1.2.1) местами и : ,

где определена на , дифференцируема на , причем .

Пусть обратная функция . Заменим на :

Т.е.

*Пример.*

***Интегрирование по частям***

Пусть функции и дифференцируемы на . Тогда , т.е.

***Док-во:*** *,* т.е.

, т.е. ,

*Примеры.*

1. .
2. .
3. ,

т.е. , т.е.

.

***Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен***

1. , .

Выделим полный квадрат, получим табличный интеграл (10-13)

*Примеры*.

1. .
2. .
3. , .

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена , т.е. представим числитель в виде

где – находится с помощью выделения полного квадрата.

Аналогично

где .

*Примеры*.

***Интегрирование тригонометрических функций.***

1. , где или – нечетное натуральное число (например, )

*Пример.*

1. , где – четные. Используем формулы понижения степени

*Пример.*

1. где (т.е. ). Используем формулы

*Пример.*

1. . Понижение показателя с использованием формул

*Пример*.

1. где Понижение степени с использованием формул:

и т.д.

*Пример*.

+c,

Где

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

1. , где .

Подстановка .

*Пример*.

1. **,** где .

Подстановка ,

*Пример.*

***Интегрирование иррациональных функций.***

1. .

Замена , –общий знаменатель (Н.О.К. ).

*Пример*.

Замена

*Пример*.

1. **.**

Выделив полный квадрат, получим интеграл одного из видов:

Замена

*Пример*.

1. **.**

Замена .

*Пример*.

1. **.**

Замена

*Пример*.

***Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции:***

( «неберущиеся» интегралы).

# Интегрирование рациональных дробей. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование неправильных рациональных дробей.

*Рациональная дробь*

где

***Опр.*** Рациональная дробь называется правильной, если .

***Опр.*** Рациональная дробь называется неправильной, если .

Пусть – неправильная дробь. Разделим с остатком на , т.е. представим в виде , где – многочлен степени , степень многочлена меньше . Тогда , где – правильная рациональная дробь.

*Пример.*

***Разложение многочлена на множители.*** Пусть

Тогда (1.3.1)

где – корни многочлена кратности соответственно,

.

*Пример*.

.

***Простейшие рациональные дроби.***

***Опр.*** Простейшими называют рациональные дроби одного из следующих видов:

***Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших.***

Пусть – правильная рациональная дробь, разложен по формуле (1.3.1). Тогда можно представить в виде суммы простейших дробей:

(1.3.2)

– неопределенные коэффициенты.

*Пример*.

– правильная дробь.

– неопределенные коэффициенты.

*Пример* (определение коэффициентов).

*.* (1.3.3)

Найдем . Приведем слагаемые в правой части (1.3.3) к общему знаменателю:

Приравняем числители полученной дроби и исходной дроби :

(1.3.4)

Приравняем коэффициенты при в (1.3.4):

Приравняем коэффициенты при , т.е. :

***Интегрирование простейших дробей 1-3 типов.***

1. – выделить в числителе производную трехчлена.

*Пример.*

***Интегрирование простейших дробей 4 типа.***

Выделим полный квадрат: ("+", т.к. иначе трехчлен имел бы корни)

Замена . Тогда

Рассмотрим .

Получим формулу понижения, выражающую через

*Пример.*

.

.

***Алгоритм интегрирования рациональных дробей.***

1. Если – неправильная рациональная дробь, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:
2. Представить согласно (1.3.2) в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.
3. Найти неопределенные коэффициенты.
4. Проинтегрировать сумму простейших дробей.

# Определенный интеграл, его механический и геометрический смысл, теорема существования. Линейность и аддитивность определенного интеграла.

***Задача о массе неоднородного стержня.***

Стержень длины имеет плотность . Найти массу .

Разобьем стержень на малые участки:

Тогда можно считать каждый участок однородным, и масса k-го участка

, где , . Тогда масса стержня

. Перейдя к пределу при , получим точное значение массы

***Вычисление координаты точки, движущейся с переменной скоростью.*** Рассмотрим точку, движущуюся по прямой с переменной скоростью . Пусть начальная координата точки равна . Найти координату точки в момент времени .

Разобьем интервал времени на малые интервалы:

Считая, что за малый интервал скорость не меняется, получаем изменение координаты за этот интервал:

, где ,

Тогда

Точное значение:

***Определенный интеграл как предел интегральных сумм.***

Пусть функция определена на .

***Опр.*** Разбиением отрезка называется совокупность точек , где .

– элементарный отрезок (),

, – диаметр разбиения .

Выберем произвольные точки

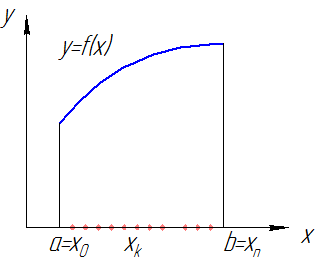
***Опр.*** Интегральной суммой функции , соответствующей разбиению отрезка и выбору точек () называется величина (см. рис. 1).

Рис.

***Опр.*** Определенным интегралом функции на отрезке называется конечный предел при интегральных сумм , если он существует и не зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек .

***Обозн.:*** *,* т.е.

Тогда масса неоднородного стержня: ; координата точки: .

***Опр.*** Если для функции существует , то функция называется интегрируемой (по Риману) на .

***Теорема*** *(необходимое условие интегрируемости.)*

Пусть функция интегрируема на , тогда ограничена на .

***Теорема*** *(достаточное условие интегрируемости 1).*

Непрерывная на функция является интегрируемой на

***Теорема*** *(достаточное условие интегрируемости 2).*

Пусть непрерывна на кроме конечного числа точек разрыва первого рода , тогда является интегрируемой на

***Геометрическая интерпретация определенного интеграла.*** , непрерывна на

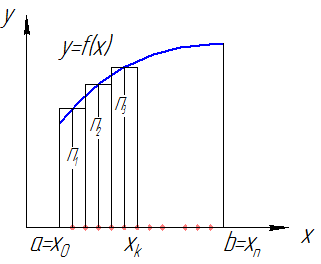
.

Рис.

– площадь прямоугольника со сторонами (см. рис. 2).

– площадь ступенчатой фигуры

При получим площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции сверху, осью снизу и прямыми .

***Свойства определенного интеграла***

1. Линейность

Пусть функции и интегрируемы на Тогда

1. функция интегрируема на и
2. функция () интегрируема на и

***Док-во:***

1. составим интегральную сумму для функции

Тогда

1. Аналогично

Тогда

1. Аддитивность (см. рис. 3).

Пусть функция интегрируема на , точка , тогда

***Док-во:***

Рассмотрим разбиение отрезка такое, что для некоторого . Ему соответствуют разбиения отрезков и , соответственно, и

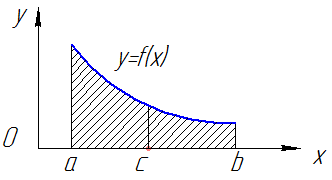


Рис.

Т.е.

***Замечание.*** Если , то по определению ,

. Тогда равенство (1.4.1) справедливо при любом взаимном расположении точек ,

***Теорема*** *(об оценке определенного интеграла)*

Пусть интегрируема на , .

Тогда

.

***Док-во:*** . Т.к. , то ,

При получим

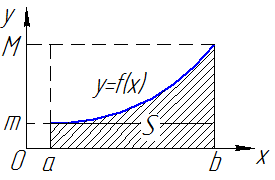
***Геометрическая интерпретация:***

Рис.

(площаль криволинейной трапеции заключна между площадьми прямоугольников высотой *m* и *M*.) (см. рис. 4).

***Следствиe (интегрирование неравенства).***

Пусть на , тогда .

***Док-во:*** рассмотрим функцию на . Возьмем . По теореме об оценке

*Пример.*

т.к. , то . По теореме об оценке

***Теорема*** *(о среднем значении для определенного интеграла).*

Пусть непрерывна на . Тогда такая, что .

***Док-во:*** т.к. непрерывна на , то она достигает на своего наибольшего и наименьшего значений , По теореме об оценке , (равенство возможно только для т.е. для непрерывных функций, отличных от константы . По теореме о промежуточном значении непрерывной функции: . Возьмем .

# Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть интегрируема на . Зафиксируем . Рассмотрим определенный интеграл по :

– определенный интеграл с переменным верхним пределом (см. рис. 5).

***Теорема*** *(о производной интеграла с переменным верхним пределом).*

Пусть непрерывна на . Тогда

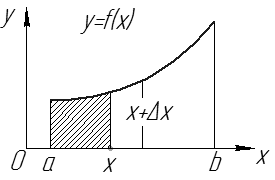
 ***Док-во:*** *,* где

Рис.

При , (т.к. – непрерывная функция) т.е.

***Следствие:*** если непрерывна на , то на существует ее первообразная . Любая первообразная имеет вид .

*Пример.*

*–* первообразная для (не выражается через элементарные функции, интеграл – неберущийся).

***Формула Ньютона-Лейбница.***

Пусть непрерывна на , – ее первообразная. Тогда .

***Док-во:*** пусть – произвольная первообразная. Рассмотрим – также первообразная. Тогда . Возьмем . Т.к. , то , т.е. . При : или :

*Пример.*

.

# Вычисление определенного интеграла подстановкой и по частям. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат, интегрирование периодических функций.

Пусть непрерывна на , функция имеет непрерывную производную на , причем . Тогда .

***Док-во:*** пусть –первообразная для на , т.е. . Тогда по формуле Ньютона-Лейбница: . Функция – первообразная для , по формуле Ньютона-Лейбница:

*Пример.*

***Интегрирование по частям в определенном интеграле.***

Пусть функции и имеют непрерывные производные на [.

Тогда , т.е.

***Док-во:*** *,* т.е.

*Пример.*

***Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат***

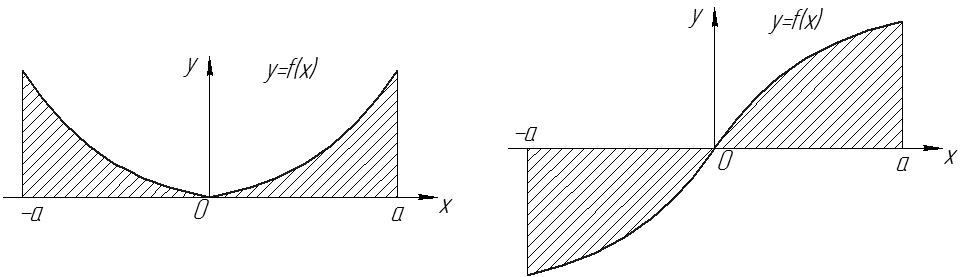
******

Рис.

***Теорема.*** Пусть интегрируема на , тогда:

1. Если – четная, то .
2. Если – нечетная, то .

***Док-во***: (по свойству аддитивности) (см. рис. 6).

– для четной функции,

– для нечетной функции.

*Пример.*

***Интегрирование периодических функций.***

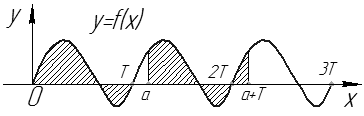
Пусть – периодическая с периодом , (т.е. ), интегрируемая на Тогда и

Рис.

(см. рис. 7).

# Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, их свойства. Признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

***Несобственные интегралы 1-го рода***

Пусть определена на и интегрируема на любом отрезке вида . Зафиксируем и рассмотрим определенный интеграл .

***Опр.*** Несобственным интегралом 1 рода функции от до называется предел при определенного интеграла от до :

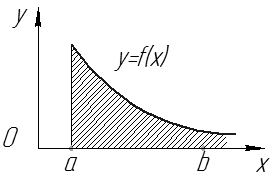
Если конечный предел , то несобственный интеграл от до называется сходящимся, в противном случае (т.е. если предел равен или не существует) – расходящимся.

Рис.

***Геометрический смысл –***  площадь бесконечной фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 8).

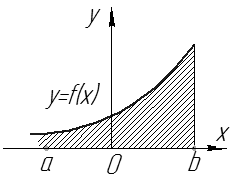
******Аналогично для функции , определенной на по определению

Рис.

(см. рис. 9).

***Свойство линейности.***

Если , сходятся, то сходятся интегралы

.

Аналогично для .

***Вычисление несобственного интеграла 1-го рода.***

Пусть – первообразная для на , тогда

Таким образом, сходится конечный предел первообразной

*Примеры*.

,

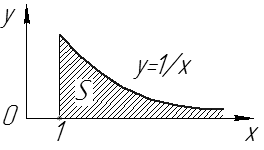


Рис.

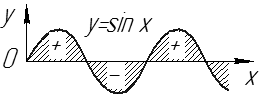


Рис.

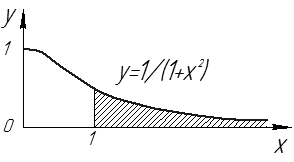
**

Рис.

***Исследование несобственных интегралов 1-го рода на сходимость.***

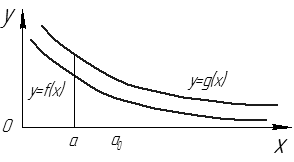
***Признаки сходимости:***

Рис.

1. *Признак сравнения.*

Пусть

1. Если сходится, то также сходится (см. рис. 13).
2. Если расходится, то также расходится.
3. *Предельный признак сравнения*:

пусть для и при , т.е. .

Тогда и оба сходятся или оба расходятся.

1. Если сходится , то сходится и (обратное неверно!).

В качестве «образцов» интегралов для сравнения обычно используются интегралы

*(a>0).*

*Примеры*.

1. .

при расходится исходный интеграл расходится по предельному признаку.

При ; ; ,

*;* интеграл сходится по предельному признаку.

3.

Т.к. при (логарифм растет медленней степенной функции), то исходный интеграл сходится по признаку сравнения.

.

– сходится сходится по признаку 3.

***Несобственные интегралы 2-го рода***

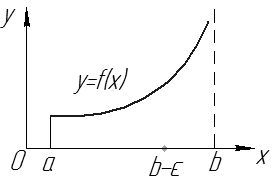
Пусть непрерывна на , но не ограничена в левой окрестности точки . Определенный интеграл не существует, т.к. – неограниченная. Рассмотрим . Т.к. непрерывна на , то – определенный интеграл.

Рис.

***Опр.*** Несобственным интегралом 2 рода по от функции , неограниченной в окрестности точки , называется предел

Если существует конечный предел (1.8.2), то несобственный интеграл 2-го рода называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

***Геометрический смысл***:

при – площадь фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 15).

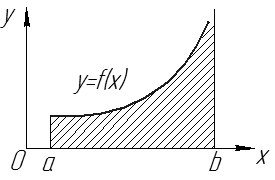
******

Рис.

– несобственный интеграл 2-го рода для функции с особой точкой .

– несобственный интеграл 2-го рода для функции с особой точкой

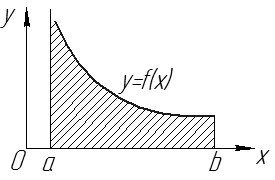
******

Рис.

***Свойство линейности.***

Если , сходятся, то сходятся интегралы

.

***Вычисление несобственного интеграла 2-го рода.***

Случай функции с особой точкой

– первообразная для

Таким образом, сходится конечный предел первообразной .

*Примеры*.

Рассмотрим интегралы

Рассмотрим случай интеграла с особой точкой в левом конце отрезка:

Случай

Аналогично рассматривается интеграл с особой точкой в правом конце отрезка. Таким образом

имеет при порядок роста относительно ).

***Исследование несобственных интегралов 2-го рода на сходимость.***

***Признаки сходимости:***

1. *Признак сравнения*:

пусть

1. Если сходится, то также сходится.
2. Если расходится, то также расходится.
3. *Предельный признак сравнения.*

Пусть для и при , т.е. .

Тогда и оба сходятся или оба расходятся.

1. Если сходится , то сходится и .

*Примеры*.

1.

При ,

2.

При

***Замечание***: если непрерывна на кроме точки и не ограничена в окрестности точки , тогда

(для первого и второго интегралов в правой части особой точкой является правый или левый конец отрезка).

сходится сходятся оба интеграла и

*Пример*.

***Примеры несобственных интегралов с несколькими особыми точками***

Исходный интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части:

1. .
2. .

.

(несобственный интеграл 2-го рода + несобственный интеграл 1-го рода ).

1. – сходится при
2. – сходится при

Значит, расходится для любого .

.

При

При .

Таким образом исходный интеграл расходится.

***Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.***

Рассмотрим несобственный интеграл

***Опр.*** Несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл .

***Опр.*** Несобственный интеграл называется условно сходящимся, если он сходится, но интеграл расходится.

*Пример*.

*(*без доказательства, см. рис. 17).

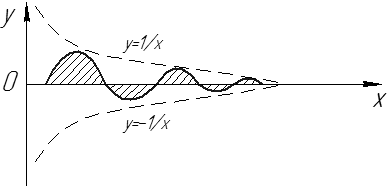


Рис.

# Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.

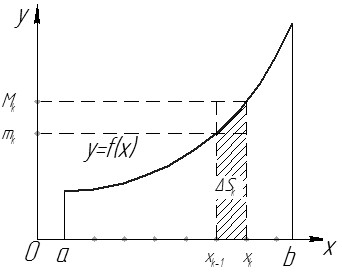
***Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах***

Рис.

непрерывна на

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями Пусть – разбиение отрезка на элементарные отрезки ; ; .

Рассмотрим площадь части фигуры, удовлетворяющей условию . Пусть и – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на

заключена между площадями прямоугольников с высотой и

Сложим по от до :

Т.е.

где – интегральные суммы, соответствующие разбиению и выбору точек и соответственно (нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу); при

Из (1.9.1) получаем:

***Замечания***:

1. (см. рис. 19.)

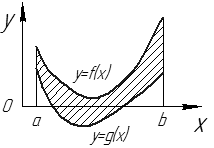


Рис.

1. (см. рис. 20).

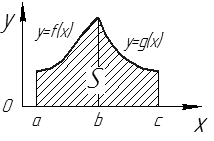


Рис.

1. (см. рис. 21).

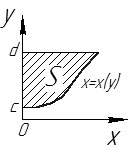
******

Рис.

***Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.***

Рассмотрим кривую, , где функция непрерывна на .

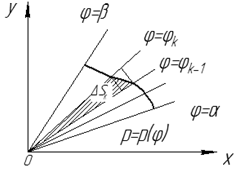


Рис.

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями . Пусть – разбиение :

Рассмотрим площадь части фигуры, удовлетворяющей условию (см. рис. 22). Пусть и – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции :

*.*

заключена между площадями круговых секторов радиусов и :

Сложим по от до :

Т.е.

где – интегральные суммы функции , соответствующие разбиению и выбору точек и соответственно (нижняя и верхняя интегральные суммы).

При из (1.9.2) получаем: .

***Замечания***:

1. (см. рис. 23).

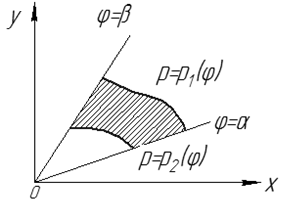
**

Рис.

1. (см. рис. 24).

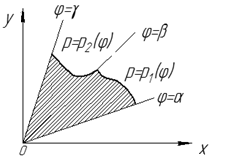


Рис.

# 

# Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения.

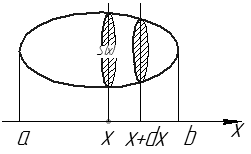


Рис.

Рассмотрим в пространстве тело , каждая точка которого удовлетворяет неравенству . Пусть площадь сечения плоскостью равна непрерывна на . Найдем объем тела . Зафиксируем . Рассмотрим малое . Рассмотрим часть (слой) тела , соответствующий отрезку . Объем этой малой части приблизительно (c точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно равен объему цилиндра с площадью основания и высотой

Суммируя по всем таким тонким слоям, получаем

***Объемы тел вращения.***

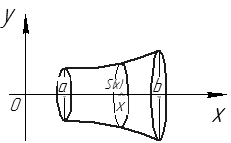


Рис.

Фигура, ограниченная линиями , вращается вокруг оси (см. рис. 26).

Найдем объем тела вращения. Зафиксируем . Сечение тела плоскостью – круг радиуса . Тогда

Ту же фигуру вращаем вокруг оси (см. рис. 27).

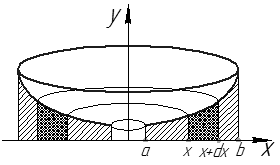


Рис.

Рассмотрим малый отрезок , где . При вращении соответствующей части фигуры получаем тело объема , где – площадь кольца радиусов и соответственно:

Тогда

Суммируя по тонким "слоям", получим

Общий случай:

Таким образом получаем для вращения фигуры, ограниченной линиями, имеем

При вращении фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 28).

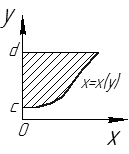
**

Рис.

# Вычисление длин дуг кривых и площадей поверхностей вращения

***Длина дуги кривой.***

Пусть дуга задана параметрическими уравнениями:

Функции имеют на непрерывные производные.

,

Рассмотрим переменную точку

– переменная дуга длиной .

Дифференциал дуги

– длина всей дуги.

Случай плоской кривой:

Случай графика функции :

Случай кривой, заданной в полярных координатах:

***Площадь поверхности вращения.***

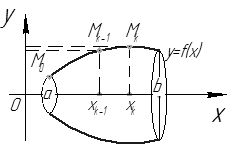


Рис.

Рассмотрим функцию – непрерывна на

Пусть – дуга графика – вращается вокруг оси . Рассмотрим ломаную , вписанную в дугу , где (см. рис. 29).

При вращении вокруг звена ломаной получим боковую поверхность усеченного конуса.

***Опр.*** Площадью поверхности вращения называется предел сумм площадей боковых поверхностей усеченных конусов, полученных при вращении вписанной ломаной, при стремлении к максимальной длины звена ломаной.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований и и образующей равна

В данном случае

,

Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса , полученной при вращении звена ломаной

Отсюда площадь поверхности вращения

или

(при надо брать ).

Случай кривой, заданной параметрическими уравнениями:

Случай кривой, заданной в полярных координатах:

Аналогично при вращении вокруг оси :

Случай произвольной оси вращения:

– расстояние от переменной точки кривой до оси вращения; – дифференциал дуги.

# 

# Обыкновенные дифференциальные уравнения.

# 2.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). ДУ 1-го порядка. Частные и общее решения ДУ, интегральные кривые. Задача Коши и теорема существования и единственности ее решения. Особые точки и особые решения ДУ.

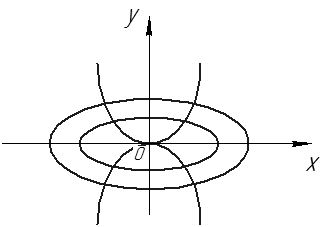


Рис.

Рассмотрим на плоскости семейство эллипсов

– произвольная положительная постоянная (см. рис. 30).

Найдем семейство кривых, ортогональных семейству эллипсов.

1. Составим дифференциальное уравнение (ДУ) семейства эллипсов.

Продифференцируем уравнение (2.1.1), считая :

Отсюда - ДУ семейства эллипсов. Тогда =

1. Составим ДУ ортогонального семейства. В т. угловой коэффициент касательной должен быть равен , т.е. ДУ ортогонального семейства:

.

1. Найдем уравнение ортогонального семейства:

Получаем – семейство парабол.

***Обыкновенное ДУ 1-го порядка -***

, где – неизвестная функция; – функция 3-х переменных.

ДУ 1-го порядка, разрешенные относительно производной:

– определена в области .

***Опр.*** Частным решением ДУ (2.1.2) называется функция , определенная на , при подстановке которой в ДУ (2.1.2) оно обращается в тождество на , т.е. .

*Пример*.

.

– частное решение, т.к. – тождество;

*–* также частное решение, т.к. – тождество.

***Опр.*** График частного решения ДУ называется интегральной кривой ДУ

***Опр.*** Равенство , неявно задающее решение ДУ называется частным интегралом ДУ .

***Задача Коши для ДУ :*** найти частные решения ДУ, удовлетворяющие начальному условию , где ,

*т.е. задача Коши* может быть записана следующими образом:

***Геометрический смысл:*** найти интегральную кривую ДУ , проходящую через т. .

***Теорема Коши существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка.***

Пусть функция и ее частная производная непрерывны в области . Тогда для точки существует и при том единственное решение задачи Коши.

***Геометрический смысл:*** единственная интегральная кривая, проходящая через т. .

*Замечание.* Решение определено только в окрестности т. .

*Пример.*

и непрерывны в области

, т.е. в окрестности точки 0. В любой большей окрестности 0 функция и не удовлетворяет ДУ в этих точках.

*Пример* (неединственность в задаче Коши).

*,*

Из начального условия .

– также решение данной задачи Коши.

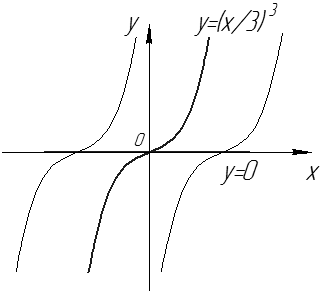


Рис.

Через точку проходит более одной интегральной кривой (см. рис. 31). Не выполняется условие непрерывности

***Опр***. Общим решением ДУ называется семейство функций, зависящих от параметра , т.е. , – произвольная постоянная, такое, что:

1. для фиксированного функция является частным решением,
2. для т. такое, что частное решение удовлетворяет начальному условию

*Замечание*. ДУ можно записать в виде (используя то, что .

***Опр***. Равенство , неявно задающее общее решение называется общим интегралом ДУ

# Геометрическая интерпретация ДУ 1-го порядка. Поле направлений. Геометрическое решение ДУ 1-го порядка с помощью изоклин.

Пусть для ДУ выполняется условие существования и единственности, т.е. через любую точку проходит ровно одна интегральная кривая - график частного решения .

Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке равен . Таким образом, в каждой точке области ДУ (2.1.2) задает направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку В задано поле направлений (см. рис. 32).

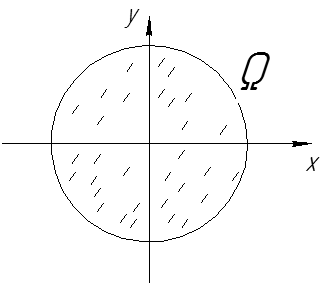
******

Рис.

***Опр.*** Изоклиной ДУ (2.1.2) называется кривая, во всех точках которой угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через заданную точку, одинаковый и равен заданному .

*Уравнение изоклины*:

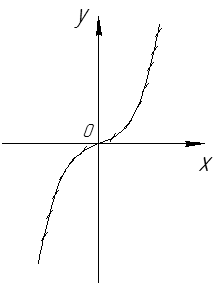
**

Рис.

*Пример.*

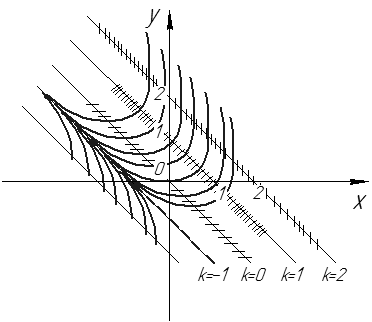


Рис.

Уравнение изоклин:

Прямая является изоклиной и является интегральной кривой, т.к. – частное решение ДУ, т.е. является асимптотой для интегральных кривых (другие интегральные кривые приближаются к этой прямой, но не пересекают ее, т.к. через одну точку проходит только одна интегральная кривая.)

При

При

Отсюда на прямой находятся точки локального минимума решений ДУ.

.

(см. рис. 34)*.*

# Простейшие типы ДУ 1-го порядка (с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли) и их решение.

1. *ДУ с разделяющимися переменными*

или

*.*

Запишем ДУ в виде

Проинтегрируем:

– общий интеграл, – произвольная постоянная.

*Замечание.* Если уравнение имеет корни , то функции являются частными решениями ДУ.

*Пример.*

*–* также решение ДУ.

1. *Однородные ДУ*

Замена , тогда

Тогда, подставляя в ДУ получим

– ДУ с разделяющимися переменными, находим .

*Пример.*

*(x>0).*

Замена: . Подставим в ДУ:

,

– общий интеграл.

– решение, т.е. , т.е. .

1. *Линейные ДУ 1-го порядка.*

– линейное однородное ДУ (ЛОДУ) 1-го порядка.

– линейное неоднородное ДУ (ЛНДУ) 1-го порядка.

1. ЛОДУ 1-го порядка.

– с разделяющимися переменными

– первообразная

(р получаем при ).

1. ЛНДУ 1-го порядка.
2. Решим соответствующее ЛОДУ: – произвольная постоянная
3. Решение ЛНДУ ищем методом вариации постоянной, т.е. в виде

Тогда

Подставим в ЛНДУ:

Находим ; интегрируем, находим .

*Пример.*

1. Соответствующее ЛОДУ:
2. Ищем решение ЛНДУ в виде

Подставляем в ЛНДУ:

Проинтегрировав, получим

Подставим в (2.3.1):

=

*Замечание.*  ДУ

сводится к ЛНДУ относительно обратной функции

Решаем методом вариации произвольной постоянной:

.

1. *Уравнения Бернулли*

,

.

Ищем решения в виде . Подставим в ДУ:

,

Найдем функцию такую, что

– ДУ с разделяющимися переменными (ЛОДУ).

Используя (2.3.2), получим

– ДУ с разделяющимися переменными. Найдем

*Пример.*

Найдем из ДУ .

Подставим в (2.3.3):

,

Тогда

*Замечание.* ДУ

сводится к ДУ Бернулли относительно функции :

Решение ищем в виде

***Сведение ДУ Бернулли к ЛНДУ.***

Разделим на (при – решение):

Пусть , тогда ,

Подставим в ДУ:

*Пример.*

(ДУ Бернулли при ; – решение).

Разделим на

Замена

Подставим, получим

.

Решая методом вариации постоянной, получим

, т.е.

и

.

# 

# ДУ n-го порядка. Частные и общее решения. Задача Коши, ее геометрическая интерпретация при n=2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Краевая задача.

,

– функция от переменных.

ДУ n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

определена в области .

***Опр***. Функция называется частным решением ДУ (2.4.1)на интервале , если при ее подстановке в (2.4.1) получается тождество на .

***Задача Коши для ДУ n-го порядка***

Найти частное решение ДУ (2.4.1), удовлетворяющее начальным условиям:

где точка .

***При*** задача Коши имеет вид

*,*

***геометрический смысл:*** найти интегральную кривую, проходящую через точку плоскости и имеющую заданный угловой коэффициент касательной в т. .

***Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ n-го порядка***

Пусть функция и ее частные производные непрерывны в области . Тогда для точки , что на интервале существует и при том единственное решение задачи Коши.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть для ДУ n-го порядка выполняется условие существования и единственности. При каких возможно расположение интегральных кривых (см. рис. 35, 36)?

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. | Рис. |
| (Ответ: соответственно | *.)* |

***Опр***. Общим решением ДУ n-го порядка (2.4.1) называется семейство функций , зависящее от произвольных постоянных такое, что

1. Для фиксированной функция является частным решением ДУ (3).
2. Для точки такие, что частное решение удовлетворяет начальным условиям (2.4.2).

***Краевая задача для ДУ 2-го порядка:*** найти частное решение на отрезке [,] ДУ

*удовлетворяющее краевым условиям*

***Опр.*** Равенство , неявно задающее общее решение ДУ n-го порядка называется общим интегралом ДУ n-го порядка.

# Понижение порядка некоторых типов ДУ высших порядков.

(ДУ не содержит )

Замена

Получаем для ДУ 1-го порядка:

Находим . Тогда

*Пример.*

Замена

Получаем для ДУ 1-го порядка:

*Замечание.*

ДУ , сводится к ДУ

(ДУ не содержит явно )

Замена . Подставим в ДУ:

ДУ 1-го порядка относительно . Решая его, получаем общее решение

.

с разделяющимися переменными

*Пример*.

.

Замена . Подставим в ДУ:

# Линейные ДУ (ЛДУ) n-го порядка: однородные (ЛОДУ) и неоднородные (ЛНДУ). Теорема существования и единственности решения. Линейный дифференциальный оператор. Свойства линейного дифференциального оператора и линейность пространства решений ЛОДУ.

ЛДУ n-го порядка (неоднородное):

Коэффициенты и правая часть – функции, непрерывные на или на . Для . Разделим на . Получим ДУ вида

(2.6.1)– ЛНДУ го порядка. Соответствующее ЛОДУ:

***Задача Коши для ДУ***: найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

где .

***Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ЛДУ го порядка***

Пусть непрерывны на . Тогда для точки и решение задачи Коши (2.6.1),(2.6.2), причем оно определено на всем интервале .

Рассмотрим левую часть ЛДУ (2.6.1) и (2.6.10) – дифференциальный оператор

.

Покажем, что является линейным оператором, т.е. и , где .

,

Таким образом, – ***линейный дифференциальный оператор.***

Операторная форма ЛДУ:

ЛНДУ:

ЛОДУ:

***Линейные однородные ДУ (ЛОДУ) n-го порядка.***

***Теорема.*** Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка является линейным пространством относительно операций сложения функций и умножения на число.

***Док-во.*** Нужно доказать, что операции сложения частных решений и умножения частных решений на число не выводит из множества частных решений, т.е. сумма частных решений – также решение, произведение частного решения на число – также решение, .

Пусть – решения, тогда , т.е. – решение, , т.е. – также решение. Нулевым вектором в линейном пространстве решений ЛОДУ является функция .

Итак, решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство.

# Линейная зависимость функций. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций и о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ.

***Опр.*** Функции называются линейно зависимыми на , если , не все равные , такие, что

***Опр.*** Если выполнение равенства () на всем интервале возможно только при , то функции называются линейно независимыми на .

***Критерий линейной зависимости***:

Функции линейно зависимы на для некоторого k=1,….n (т.е. хотя бы одна из функций линейно выражается через остальные).

*Пример*.

Т.к. , то функции линейно зависимы на

Пусть функции раз дифференцируемы на .

***Опр. Определителем Вронского*** (вронскианом) системы функций называется определитель

.

***Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций***

Пусть функции линейно зависимы на . Тогда :

***Док-во***: по определению линейной зависимости функций , не все равные , такие, что . Последовательно продифференцируем это равенство:

Зафиксируем

(2.7.2) – СЛАУ (однородных) относительно , которая имеет ненулевое решение, т.е. определитель системы равен , т.е. ().

*Замечание.* Обратное неверно, т.е. если , то функции могут быть линейно независимы.

*Пример*.

,

.

Т.е. на , но и линейно независимы, т.к. . Не существует , таких, что для всех .

***Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ***

Пусть – линейно независимые на – частные решения ЛОДУ n-го порядка . Тогда

***Док-во***: (от противного)

Пусть . Рассмотрим СЛАУ относительно :

Ее определитель , следовательно, система имеет ненулевое решение, т.е. , не все равные , такие, что выполняется система (2.7.3).

Рассмотрим частное решение ЛОДУ .

.

Оно удовлетворяет в т. начальным условиям (в силу (2.7.3)):

Рассмотрим частное решение ЛОДУ

Оно удовлетворяет в т. начальным условиям

.

Таким образом, частные решения ЛОДУ и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям задачи Коши. По теореме о единственности решения задачи Коши , т.е. , т.е. – линейно зависимы на – противоречит условию линейной независимости .

Т.е.

*Замечание*. Пусть – частные решения ЛОДУ . График функции может иметь вид (см. рис. 37, 38):

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. | Рис. |
| *(для линейно независимых решений)* | *(для линейно зависимых решений)* |

Не может иметь вид (см. рис. 39, 40):

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. | Рис. |

# 

# Теорема о размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

***Теорема о размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка***

Размерность пространства решений ЛОДУ n-го порядка равна *n*.

***Док-во***: нужно доказать, что существует базис пространства решений, состоящий из частных решений, т.е. частные решения , которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Они линейно независимы на
2. Любое частное решение имеет вид
3. рассмотрим частные решения ЛОДУ , удовлетворяющие начальным условиям:

*–* фиксированная точка интервала .

По теореме существования и единственности решения задачи Коши определены на всем интервале .

Т.к. , то функции – линейно независимы на , т.к. иначе должен был бы равняться нулю.

2. Рассмотрим произвольное частное решение .

Оно удовлетворяет некоторым начальным условиям:

Рассмотрим частное решение . Оно удовлетворяет начальным условиям:

Т.е. и удовлетворяют одинаковым начальным условиям в точке . По теореме о единственности решения

***Опр.*** Система n линейно независимых частных решений ЛОДУ *n*-го порядка называется фундаментальной системой решений (ФСР) ЛОДУ.

ФСР – базис линейного пространства решений.

***Теорема о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка***

Пусть – ФСР. Тогда общее решение имеет вид:

– произвольные постоянные.

***Док-во***: нужно доказать, что для такие, что частное решение удовлетворяет начальным условиям:

.

Решение , удовлетворяющее данным начальным условиям, существует и определено на всем . линейному пространству решений и разлагается по базису линейного пространства:

# Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ n-го порядка и ее следствия.

***Теорема*** *(формула Остроградского-Лиувилля).*

Пусть – частные решения ЛОДУ n-го порядка на . – определитель Вронского системы решений . Тогда

.

***Док-во***: (для случая )

ЛОДУ 2-го порядка:

– линейный дифференциальный оператор 2-го порядка.

Пусть – частные решения, тогда

Т.к. и – решения, то

,

,

,

Проинтегрируем от до :

***Следствие 1***. Если , что , то

***Следствие 2*** (Для ЛОДУ 2-го порядка).

Пусть – частное решение ЛОДУ 2-го порядка. Тогда функция

* частное решение ЛОДУ 2-го порядка причем образуют ФСР.

***Док-во***: по формуле Остроградского-Лиувилля

Считая известным, найдем такое, что

,

*,* значит .

Т.к. , то линейно независимы и образуют ФСР.

*Пример.*

*.*

*–* частное решение, найти

Тогда

– произвольные постоянные.

# Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ n-го порядка. Теорема о наложении частных решений.

– линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами

***Теорема*** *(о структуре общего решения неоднородного ЛДУ n-го порядка).*

Пусть – частное решение ЛНДУ . Тогда

***Док-во***: нужно доказать, что такие, что функция – решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям

.

Решение задачи Коши существует и определено на в силу теоремы существования. Рассмотрим разность :

Т.е. – решение ЛОДУ; – ФСР ЛОДУ;

***Теорема*** *(о наложении частных решений).*

Пусть – частное решение ЛНДУ; ; – частное решение ЛНДУ; . Тогда – частное решение ЛНДУ

***Док-во***:

# ЛОДУ с постоянным коэффициентами. Характеристическое уравнение и построение общего решения по его корням (вывод для ).

,

– линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

.

Рассмотрим случай :

Для произвольного найдем частное решение вида

.

.

Тогда

***Опр.*** Уравнение называется характеристическим уравнением ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Таким образом, при имеем и функция является частным решением является корнем его характеристического уравнения.

***Построение ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения.***

1. ***Случай различных действительных корней.***

Пусть - различные корни характеристического уравнения. Тогда функции

образуют ФСР ЛОДУ.

***Док-во***:

– частные решения, т.к. - корни характеристического уравнения. Покажем, что – линейно независимы.

– линейно независимы.

(

При : ).

Тогда .

*Пример*.

.

Характеристическое уравнение:

,

,

,

,

.

1. ***Случай кратных действительных корней.***

Пусть - корень кратности , т.е. – многочлен, причем .

Корню кратности соответствует линейно независимых решений:

.

***Док-во***: (для n=2)

Пусть - корень кратности характеристического уравнения

.

Тогда по теореме Виета .

– решение, т.к. – корень.

Покажем, что – также решение:

.

(

*).*

Тогда

.

– решения, линейно независимые, т.к. – ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами 2-го порядка и кратным корнем .

*Пример.*

Характеристическое уравнение:

,

,

.

ФСР:.

1. ***Случай комплексных корней кратности 1.***

Пусть – корень характеристического уравнения кратности 1 . Тогда – также корень кратности 1. Паре корней соответствуют 2 линейно независимых решения:

.

***Док-во***:

Рассмотрим комплексную показательную функцию, которую введем по формуле Эйлера

Покажем, что при :

Тогда для функции

е. – комплексное решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Т.к. – решение, то , т.е. , т.е. функции

,

– решения ЛОДУ, они линейно независимы, т.к. .

*Примеры*.

1. .

,

,

,

.

ФСР: ,

.

1. .

,

ФСР: .

.

1. ***случай кратных комплексных корней (возможен только при***

Пусть – корни кратности , . Им соответствуют линейно независимых решений:

*.*

# Нахождение частных решений неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Пусть – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Рассмотрим ЛНДУ:

– квазимногочлен;

– многочлен степени ;

Тогда частное решение ЛНДУ (2.12.1) вида

,

– многочлен степени ; , если не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ; если – корень, то равен кратности корня .

*Замечание*. Коэффициентыв - неопределенные (заранее не неизвестные), находятся методом неопределенных коэффициентов.

*Пример 1.*

Соответствующее ЛОДУ: ,

Найдем .

;

– корень характеристического уравнения ЛОДУ кратности

,

,

,

Чтобы найти и , подствим функцию в ЛНДУ:

,

,

,

.

Коэффициент при 2

Коэффициент при .

Получаем СЛАУ относительно и

Рассмотрим ЛНДУ с постоянными коэффициентами

– многочлен степени ;

– многочлен степени ;

Тогда

; – многочлены степени ;

, если не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ; равен кратности корня, если является корнем.

*Пример 1.*

*(*уравнение колебаний при наличии внешней периодической силы частоты *).*

*.*

*,*

*,*

*, .*

.

Найдем .

*,*

*(*частота внешней силы равна собственной частоте резонанс, амплитуда колебаний неограниченно возрастает*).*

Чтобы найти и , подставим в ЛНДУ:

.

Коэффициент при

Коэффициент при

*Пример 2.*

*,*

*,*

*,*

*,*

*,*

*,*

Чтобы найти и , подствим в ЛНДУ:

Коэффициент при .

Коэффициент при .

# Метод вариации постоянных решения неоднородных ЛДУ n-го порядка (вывод для ).

Пусть – линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами. Рассмотрим ЛНДУ:

Соответствующее ЛОДУ:

Общее решение ЛОДУ:

.

– ФСР ЛОДУ,

– произвольные постоянные.

***Теорема***. Общее решение ЛНДУ () имеет вид

,

– ФСР соответствующего ЛОДУ,

производные функций определяются из СЛАУ

*Замечание* 1. СЛАУ (2.13.2) имеет единственное решение для , т.к. ее определитель ().

*Замечание 2.*  Функций

Тогда

,

– произвольные постоянные.

***Док-во*** (случай ). Рассмотрим ЛНДУ

– линейный дифференциальный оператор 2-го порядка.

– произвольные постоянные

СЛАУ (2.13.2) имеет вид

, или

.

1. Покажем, что если и удовлетворяют (2.13.3), то функция – решение ЛНДУ (2.13.1).

в силу (2.13.3)).

в силу (2.13.3)).

Тогда

Таким образом – решение ЛНДУ (2.13.1).

1. Решив СЛАУ (2.13.3), получим решение вида

.

Покажем, что для , такие, что решение , соответствующее и , удовлетворяет начальным условиям

.

Для и получим систему

- СЛАУ с определителем , т.к. – ФСР ЛОДУ,

т.е. – общее решение.

*Пример*.

(метод неопределенных коэффициентов неприменим!).

Соответствующее ЛОДУ:

,

,

,

,

,

,

,

,

# Нормальные системы ДУ. Задача Коши и теорема существования и единственности ее решения. Сведение ДУ n-го порядка к нормальной системе. Сведение нормальной системы к одному уравнению n-го порядка.

(2.14.1) – нормальная система ОДУ.

– независимая переменная,

– неизвестные (искомые) функции,

*–* определены в области .

Если не зависят явно от , то система (2.14.1) называется автономной.

***Векторная форма записи системы.***

Пусть . Тогда система (2.14.1) можно записать в виде

***Опр.*** Вектор-функция называется частным решением системы (2.14.1) на , если при ее подстановке в (2.14.1) все уравнения системы (2.14.1) обращаются в тождества на .

***Задача Коши*** для системы (1).

Найти частное решение , удовлетворяющее начальным условиям

где точка .

В векторной форме начальные условия имеют вид

где

***Опр.***  Семейство вектор-функций , зависящих от произвольных постоянных, называется общим решением системы (2.14.1), если

1. вектор-функция является частным решением.
2. Для такие, что удовлетворяет начальному условию (2.14.2).

Векторная форма общего решения -

.

***Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем.***

Пусть функции и их частные производные непрерывны в области огда

***Сведение ДУ n-го порядка к нормальной системе.*** *Рассмотрим ДУ -*го порядка

Введем обозначения:

.

Тогда уравнение (2.14.3) равносильно системе

*Пример.*

*.*

***Сведение нормальной системы к одному уравнению n-го порядка.***

Рассмотрим случай

Сведем к ДУ 2-го порядка. Из 1-го уравнения

Если из 1-го уравнения системы можно выразить , то для получим уравнение 2-го порядка:

(общее решение ДУ 2-го порядка).

Тогда .

*Пример.* .

Продифференцируем 1-е уравнение:

.

Из 1-го уравнения:

Характеристическое уравнение полученного ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

* 1. Автономные системы ДУ. Фазовое пространство и фазовые траектории. Первые интегралы систем ДУ. Симметричная форма записи систем ДУ и ее применение к нахождению первых интегралов.

– нормальная система ОДУ.

– независимая переменная,

– независимые функции,

*–* определены в области .

Если не зависят явно от , то система (2.15.1) является автономной.

***Фазовая плоскость.***

Рассмотрим

Пусть вектор-функция – частное решение автономной системы . Рассмотрим на плоскости кривую , заданную параметрическими уравнениями

Кривая – фазовая кривая системы на фазовой плоскости . Если система удовлетворяет условию теоремы существования и единственности, т.е. имеют непрерывные частные производные первого порядка в области , то через каждую точку области проходит ровно одна фазовая кривая.

Касательный вектор к фазовой кривой в произвольной точке (см. рис. 41):

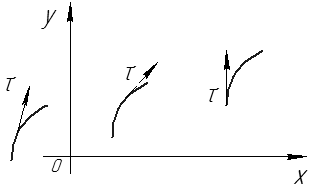


Рис.

Рассмотрим как функцию , заданную параметрически, тогда

Таким образом фазовые кривые системы интегральными кривыми ДУ 1-го порядка

*Пример*.

ДУ фазовых кривых:

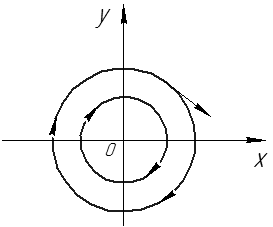
******

Рис.

***Первые интегралы нормальных систем ДУ.***

***Опр.***  Равенство

называется первым интегралом системы в области , если выполняется 2 условия:

1. Функция имеет непрерывные частные производные 1-го порядка в области и для , что .
2. Для решения системы

.

Первый интеграл позволяет понизить число уравнений в системе. Пусть в т. . Тогда по теореме о неявной функции из можно в некоторой окрестности т. выразить

Подставив в уравнения системы , начиная со второго, получим систему из (n-1) уравнения:

Чтобы полностью решить систему , нужно знать независимых первых интегралов:

Независимость первых интегралов означает, что ни один из них не может быть выражен через остальные. Система независимых первых интегралов неявно задает решение системы.

***Симметричная форма записи нормальных систем ДУ:***

Получив из симметричной формы системы интегрируемые комбинации (полные дифференциалы), можно найти 1-е интегралы. При нахождении интегрируемых комбинаций удобно использовать следующее свойство пропорций:

*Пример 1*.

Симмметричная форма системы:

По свойству пропорций получаем

Аналогично

*Пример 2*.

Для автономной системы найдем два независимых 1-х интеграла, не содержащих

Симметричная форма системы:

- (1-й интеграл).

Чтобы найти второй 1-й интеграл запишем симметричную форму системы в виде

,

Таким образом, найденные первые интегралы задают фазовые кривые системы:

*Пример 3.*

Симметричная форма:

,

- 1-й интеграл.

- 1-й интеграл.

* 1. Нормальные системы ЛДУ, однородные и неоднородные. Матричная запись системы. Линейность пространства решений системы ЛОДУ. Вронскиан системы вектор-функций и его свойства. Теорема о размерности пространства решений системы ЛОДУ. Структура общего решения. Фундаментальная система решений.

– нормальная система ЛНДУ, здесь , – функции, непрерывные на некотором интервале

Если , то – система ЛОДУ.

Матричная форма системы ЛДУ:

где

матрица

.

Соответствующая

***Теорема.*** Множество всех частных решений системы ЛОДУ является линейным пространством относительно операций сложения вектор-функций и их умножения на число.

***Док-во****:* пусть – решения системы . Рассмотрим вектор-функцию . Имеем

т.е. – решение

Аналогично при и вектор-функции получаем

т.е. удовлетворяет системе решения образуют линейное пространство.

***Опр.***  Вронскианом системы вектор-функций

называется определитель го порядка

.

***Теорема*** *(о вронскиане системы линейно зависимых вектор-функций).*

Пусть вектор-функции линейно зависимы на . Тогда для .

***Теорема*** *(о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ)*

Пусть – линейно независимые частные решения системы ЛОДУ огда для .

***Теорема*** *(о структуре общего решения нормальной системы ЛОДУ).*

где – линейно независимые частные решения системы ; – произвольные постоянные.

***Док-во***:

1. Покажем, что линейно независимых частных решений. Пусть – решения задачи Коши для системы с начальными условиями:

для некоторой .

линейно независимы, т.к.

1. Покажем, что произвольное решение задачи Коши для (2.16.2) с начальным условием является линейной комбинацией .

Покажем, что заданному начальному условию удовлетворяет вектор-функция

Действительно,

*.*

Т.е. линейная комбинация

удовлетворяет заданному начальному условию.

Таким образом любое решение является линейной комбинацией .

***Опр***. Система линейно независимых решений системы называется фундаментальной системой решений (ФСР).

***Теорема*** *(о структуре общего решения системы ЛНДУ).*

*.*

# Системы ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод для случая вещественных различных корней).

***Система ЛОДУ с постоянными коэффициентами:***

где ; .

Матричная форма:

Найдем решение вида , где .

Подставим в :

,

т.е. - собственное значение матрицы ; – соответствующий собственный вектор.

***Опр.*** Характеристическим уравнением системы ЛОДУ с постоянными коэффициентами называется характеристическое уравнение , где .

***Построение ФСР для системы по корням характеристического уравнения.***

1. Случай различных действительных корней.

Пусть - различные корни характеристического уравнения (т.е. собственные значения матрицы ),

– соответствующие собственные вектора.

Тогда вектор-функции образуют ФСР для системы .

***Док-во***: нужно доказать, что частные решения линейно независимы.

Вронскиан , т.к. собственные вектора линейно независимы (как собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям), т.е. столбцы матрицы линейно независимы.

.

*Пример*.

.

(можно использовать, что для матрицы 2Х2

Найдем собственные значения.

; собственный вектор находим из СЛАУ

,

,

.

; собственный вектор находим из СЛАУ

,

.

ФСР: ,

,

.

1. Случай кратных действительных корней.

Пусть - корень характеристического уравнения кратности . Ему соответствует решение вида

– многочлен степени . Коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов.

*Пример.*

Ищем решение в виде

Подставим в систему:

Коэффициент при в 1-м уравнении:

Коэффициент при в 1-м уравнении:

Коэффициент при во 2-м уравнении:

Коэффициент при во 2-м уравнении: . Получаем СЛАУ

1. Случай комплексных корней кратности 1.

Пусть – корень кратности 1 . Паре корней и соответствуют 2 линейно независимых решения. Пусть – комплексный собственный вектор, соответствующий комплексному собственному значению . Он находится из СЛАУ .

.

Тогда корням и соответствует комплексное решение системы ДУ:

Тогда и – вещественные линейно независимые решения, соответствующие корням и .

*Пример.*

,

Найдем собственный вектор соответствующий :

,

(второе уравнение пропорционально первому с коэффициентом ),

,

**Литература**

1. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1988.-506 с. (Сер. Математика в техническом университете. Вып. VI).
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.- 336 с. (Сер. Математика в техническом университете. Вып. VIII).
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. -М., Наука, 1981.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1981.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.:УРСС, 2004.